رقیبی برای قضیهٔ فیثاغورس

حسن طبیعی و محمد طبیعی

کلیدواژه‌ها: قضیهٔ فیثاغورس، مثلث قائم‌الزاویه، مثلث منفرجه‌الزاویه، مثلث حاده‌الزاویه.

مقدمه

«قضیهٔ فیثاغورس» که یکی از مهم‌ترین و زیباترین قضایای هندسی است، بیان می‌کند که مثلثی با اضلاع a، b و c قائم‌الزاویه است، اگر و تنها اگر: $c^۲+b^۲=a^۲$. همچنین از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر $c^۲+b^۲<a^۲$، آن‌گاه: $\hat{A}>۹۰^\circ$ و اگر $c^۲+b^۲>a^۲$، آن‌گاه $\hat{A}<۹۰^\circ$.

هدف از نوشتن این مقاله بیان و اثبات رابطه‌ای مشابه رابطهٔ قضیهٔ فیثاغورس است که سه خاصیت گفته شده را داشته باشد. هر چند اثبات‌های زیادی برای این رابطه وجود دارد، اما در اینجا قصد داریم تنها با استفاده از دو لِم معروف هندسی این رابطه را اثبات کنیم.

لِم ۱. در هر مثلث با اضلاع a، b و c رابطهٔ زیر برقرار است:

(P نصف محیط مثلث، r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، و R شعاع دایرهٔ محیطی)

$$ab+ac+bc=p^۲+r^۲+۴Rr$$

● برای اثبات این لِم کافی است از سه تساوی زیر استفاده کنیم (S مساحت مثلث است):

$$r=\frac{s}{p},\ R=\frac{abc}{۴s},\ s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

لِم ۲. در مثلث ABC، O مرکز دایرهٔ محیطی و H محل تقاطع ارتفاع‌هاست. اگر M وسط ضلع BC باشد، آن‌گاه: $۲OM=AH$.

* از آنجا که O روی عمودمنصف BC واقع است، پس: $OM \perp BC$. لذا:

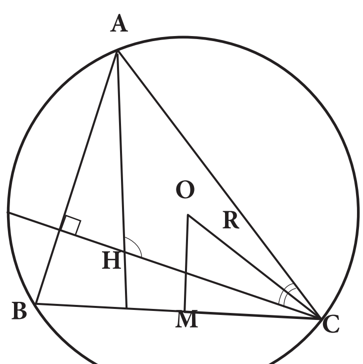
$$OM=R\cos(M\hat{O}C)=R\cos\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=R\cos\hat{A}.$$

از طرف دیگر، با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{AH}{AC}=\frac{\sin(A\hat{C}H)}{\sin(A\hat{H}C)}=\frac{\sin(۹۰-\hat{A})}{\sin(۱۸۰-\hat{B})}=\frac{\cos\hat{A}}{\sin\hat{B}}$$

همچنین: $\frac{AC}{\sin\hat{B}}=۲R$، پس: $AH=۲R\cos\hat{A}$

و در نتیجه: $\boxed{۲OM=AH}$



شکل ۱

قضیهٔ ۱. در مثلث ABC رابطهٔ $۲R+r=P$ برقرار است، اگر و تنها اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد.

● ابتدا می‌خواهیم ثابت کنیم: اگر $۲R+r=P$، آن‌گاه $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است. اگر طرفین تساوی را مجذور کنیم، خواهیم داشت: $۴R^۲+r^۲+۴Rr=P^۲$.
حال به طرفین تساوی $P^۲$ را اضافه می‌کنیم: $۴R^۲+P^۲+r^۲+۴Rr=۲P^۲$.

با توجه به لِم (۱) داریم:

$$۴R^۲+ab+ac+bc=۲P^۲$$

با جای‌گذاری $P=\frac{a+b+c}{۲}$ خواهیم داشت:

$$۴R^۲=\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۲} \Rightarrow ۸R^۲=a^۲+b^۲+c^۲$$

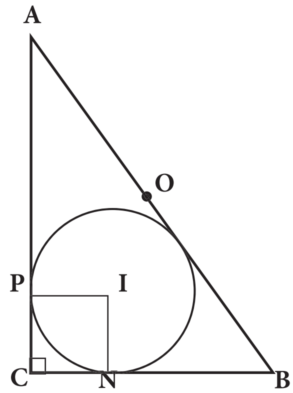
حال با استفاده از لِم (۲) می‌توان نوشت:

$R^۲-\frac{a^۲}{۴}=OM^۲=\frac{AH^۲}{۴}$ (M و N وسط‌های اضلاع هستند)و $R^۲-\frac{b^۲}{۴}=ON^۲=\frac{BH^۲}{۴}$. لذا: $۴R^۲-a^۲=AH^۲$ و $۴R^۲-b^۲=BH^۲$. پس: $۸R^۲-a^۲-b^۲=AH^۲+BH^۲$. از طرف دیگر، با توجه به تساوی (۱) داریم: $۸R^۲-a^۲-b^۲=c^۲$. پس: $AH^۲+BH^۲=c^۲$.

طبق عکس قضیهٔ فیثاغورس: $\widehat{AHB}=۹۰^\circ$. از طرف دیگر: $۱۸۰-\hat{C}=۹۰^\circ$، پس: $\hat{C}=۹۰^\circ$.

● حال می‌خواهیم ثابت کنیم: اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه: $۲R+r=P$.

می‌دانیم مرکز دایرهٔ محیطی (O) در مثلث قائم‌الزاویه در وسط وتر واقع است، پس: $۲R=c$.
حال اگر I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و P و N محل تماس دایرهٔ محاطی داخلی با AC و BC باشد، آن‌گاه روشن است که PINC مربع است و در نتیجه: $CN=r$. همچنین می‌دانیم: $CN=P-c$، پس: $r=P-c$ و $۲R=c \Rightarrow ۲R+r=p$.



شکل۲

قضیهٔ ۲. مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است، اگر و تنها اگر داشته باشیم: $۲R+r>P$.

● ابتدا ثابت می‌کنیم: اگر $۲R+r>P$، آن‌گاه مثلث منفرجه‌الزاویه است. براساس برهان خلف، مشابه استدلال قبل پس از مجذور کردن طرفین نامساوی و افزودن $P^۲$ به طرفین و استفاده از لِم (۱) خواهیم داشت: $۸R^۲>a^۲+b^۲+c^۲$. از طرف دیگر می‌دانیم: $۴R^۲-b^۲=BH^۲$ و $۴R^۲-a^۲=AH^۲$، پس: $۸R^۲-a^۲-b^۲=AH^۲+BH^۲>c^۲$ و: $\widehat{AHB}<۹۰^\circ$ و همچنین: $۱۸۰-\hat{C}=\widehat{AHB}<۹۰^\circ$. در نتیجه $\hat{C}>۹۰^\circ$ و مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است.

● حال می‌خواهیم بگوییم: اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ منفرجه‌الزاویه باشد، آن‌گاه: $۲R+r>P$. ابتدا فرض کنید: $\hat{C}>۹۰^\circ$، پس:
$c^۲>a^۲+b^۲ \Rightarrow ۲c^۲>۲a^۲+۲b^۲ \Rightarrow ۲c^۲>(a+b)^۲+(a-b)^۲$
لذا: $(c+a-b)(c-a+b)>(a+b+c)(a+b-c)$،
و: $(p-b)(p-a)>p(p-c)$. در نتیجه: $s>p(p-c)$ لذا $r=\frac{s}{p}>p-c$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ حمار: $۲R>c$، پس: $۲R+r>P$ و حکم به‌طور کامل ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۳. مثلث ABC حاده‌الزاویه است، اگر و تنها اگر $۲R+r<P$ برقرار باشد.

● **اثبات:** برای اثبات این قضیه از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $۲R+r<P$ برقرار باشد و مثلث حاده‌الزاویه نباشد. روشن است که مثلث یا باید منفرجه‌الزاویه باشد و یا قائم‌الزاویه که در هر دو حالت داریم: $۲R+r\geq P$ که با فرض $۲R+r<P$ تناقض دارد.
تناقض حاصل نتیجه می‌دهد که اگر $۲R+r<P$، آن‌گاه مثلث حاده‌الزاویه است. مشابه این استدلال می‌توان گفت اگر مثلث حاده‌الزاویه باشد، آن‌گاه: $۲R+r<P$.

منابع

۱. گودرزی، حبیب‌الله و گودرزی، محمدعلی (۱۳۸۲). روابط بین اجزای یک مثلث. انتشارات مبتکران. تهران.
۲. احمدپور، سیامک و مسگر مشهدی، مصطفی (۱۳۹۰). هندسه مسطحه از مقدمات تا المپیاد. انتشارات خوشخوان. تهران.
3. Yanloi, Wong (1996). "Geometric Identities of a traingle". Mathematical Medley Journal. September.